المتاز

في كل مسألة رياضية فرصة لإثبات أن المستحيل ممكن بالعقل!

جيل 2010

الوحدة الأولى: الاقترانات والمقادير الجبرية

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

أ. يزن العقرباوي

أ. محمد حميدي

الوحدة (1): الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس (1): الاقترانات المتشعبة

أولاً: إيجاد قيمة اقتران عند قيمة معطاة

مثال إذا كان $f(x) = 2x + 6$ فأجب عن الأسئلة الآتية تباعاً:

a) $f(3)$ b) $f(-4) + 10$

c) جد قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$

الحل

a) $f(3) = 2(3) + 6 = 6 + 6 = 12$

b) $f(-4) + 10 = 2(-4) + 6 + 10$

$= -8 + 6 + 10 = -2 + 10 = 8$

c) $f(x) = -10 \rightarrow 2x + 6 = -10$

$2x = -16 \rightarrow \boxed{x = -8}$

مثال إذا كان: $f(x) = 5x - 3$ جد قيمة كل مما يأتي:

1) $f(0)$ 2) $f(5)$

3) $25 - f(-2)$ 4) $f(2) + f(-1)$

الحل

1) $f(0) = 5(0) - 3 = 0 - 3 = -3$

2) $f(5) = 5(5) - 3 = 25 - 3 = 22$

3) $25 - f(-2) = 25 - (5(-2) - 3)$

$= 25 - (-10 - 3) = 25 - -13$

$= 38$

4) $f(2) + f(-1) = (5(2) - 3) + (5(-1) - 3)$

$= (10 - 3) + (-5 - 3) = 7 + -8 = -1$

مثال إذا كان: $g(x) = 10 - x$ فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعاً:

1) $g(-5)$ 2) $g(3) + 6$

3) جد قيمة x التي تجعل $g(x) = -35$

الحل

1) $g(-5) = 10 - (-5) = 10 + 5 = 15$

2) $g(3) + 6 = (10 - 3) + 6 = 7 + 6 = 13$

3) $10 - x = -35$

$x = -45 \rightarrow \boxed{x = 45}$

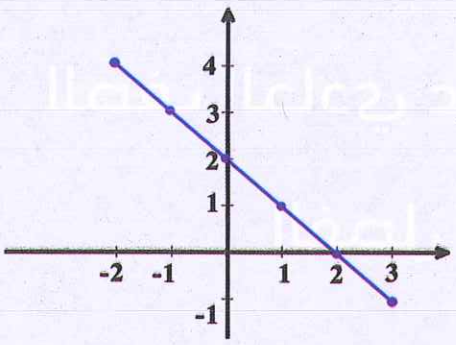
ثانياً: التمثيل البياني لاقترانات ضمن فترة

مثال أمثّل كل اقتران مما يأتي بيانياً، وأحدد مجاله ومداده:

(1) $f(x) = -x + 2, -2 \leq x \leq 3$

الحل

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	3	2	1	0	-1



المجال: هو مجموعة قيم x الحقيقية حيث $-2 \leq x \leq 3$

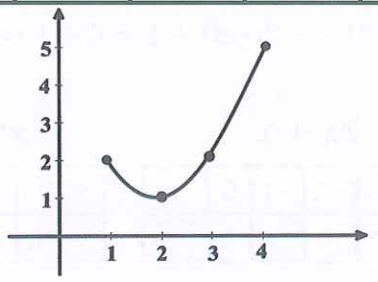
أو الفترة: $x \in [-2, 3]$

المدى: $-1 \leq y \leq 4$ أو $y \in [-1, 4]$

(2) $f(x) = x^2 - 4x + 5, 1 \leq x \leq 4$

الحل

x	1	2	3	4
y	2	1	2	5



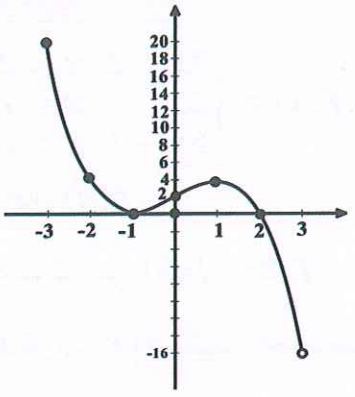
المجال: $x \in [1, 4]$ أو $1 \leq x \leq 4$

المدى: $y \in [1, 5]$ أو $1 \leq y \leq 5$

(3) $f(x) = -x^3 + 3x + 2, -3 \leq x < 3$

الحل

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	20	4	0	2	4	0	-16

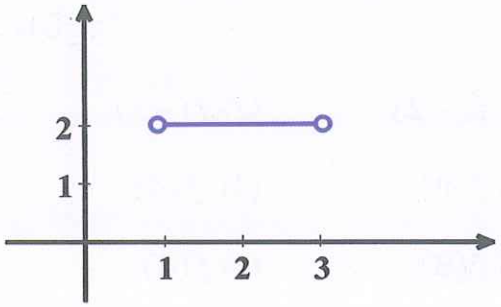


المجال: $x \in [-3, 3)$ أو $-3 \leq x < 3$

المدى: $y \in (-16, 20]$ أو $-16 < y \leq 20$

(4) $f(x) = 2, x \in (1, 3)$

x	1	2	3
y	②	2	②



أختبر نفسك (واجب)

(1) إذا كان: $f(x) = 2 - 3x$ فأجب عن الأسئلة الآتية تباعاً:

a) $f(0)$ b) $f(1)$

c) $f(-2)$ d) $25 - f(-3)$

e) $f(2) + f(-1)$

g) جد قيمة x التي تجعل $f(x) = 23$

(2) مثل بيانياً وحدد مجال ومدى كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = x^2 - 4, -1 \leq x \leq 4$

b) $f(x) = x^3 - 3x - 2, -3 < x \leq 3$

ثالثاً: الاقتران المتشعب

هو الاقتران المعرّف بقواعد مختلفة عند أجزاء مختلفة من مجاله.

مثال إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & , \quad x<-1\\ 4x-3, & -1\le x\le 4\\ 2 & , \quad x>4\end{cases}$$

جد ما يأتي:

(1) $f(-2)$ (2) $f(-1)$

(3) $f(0)$ (4) $f(4)$

(5) $f(8)$ (6) $f(5)$

الحل

(1) $f(-2)=3(-2)^2=3(4)=12$

(2) $f(-1)=4(-1)-3=-4-3=-7$ نقطة تشعب

(3) $f(0)=4(0)-3=0-3=-3$

(4) $f(4)=4(4)-3=16-3=13$ نقطة تشعب

(5) $f(5)=2$

مثال إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1, & -3\le x<1\\ x^2 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

جد ما يأتي:

(1) حدد مجال الاقتران $f(x)$

* جد قيمة كل مما يلي:

(2) $f(-2)$ (3) $f(1)$ (4) $f(-3)$

(4) مثل $f(x)$ بيانياً ثم أحدد مداه.

الحل

(1) المجال: $[-3,\infty)$

(2) $f(-2)=-2(-2)+1=4+1=5$

(3) $f(1)=(1)^2=1$ نقطة تشعب

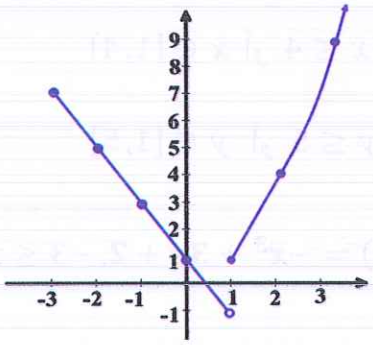
(4) $f(-3)=-2(-3)+1=6+1=7$ طرف

$-2x+1$

x	-3	-2	-1	0	1
y	7	5	3	1	-1

x^2

x	1	2	3
y	1	4	9



المدى: $(-1,\infty)$ $y\in(-1,\infty)$ أو $y>-1$

اتحقق من فهمي صـ10

إذا كان: $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x<2\\ 5 & , \quad x=2\\ 2x-1, & x>2\end{cases}$:

a) أُحدد مجال $f(x)$.

b) أجد قيمة كلٍّ من $f(5)$ و $f(2)$.

c) أُمثل الاقتران $f(x)$ بيانياً، وأُحدّد مداه.

الحل

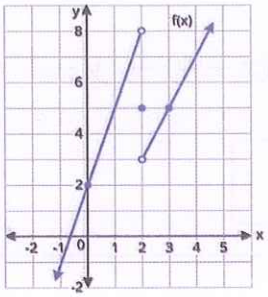
a) مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

$x \in (-\infty, \infty) : R$:

b) $f(5) = 2(5) - 1 = 9$

$f(2) = 5$

c)



مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

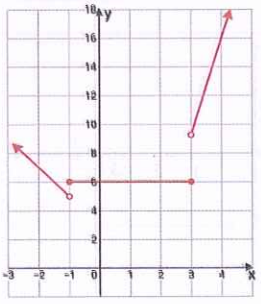
كتاب الطالب صـ17

أُمثّل كلاً من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجالها ومداها:

$$(9)\ f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & x < -1 \\ 6, & -1 \le x \le 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

الحل

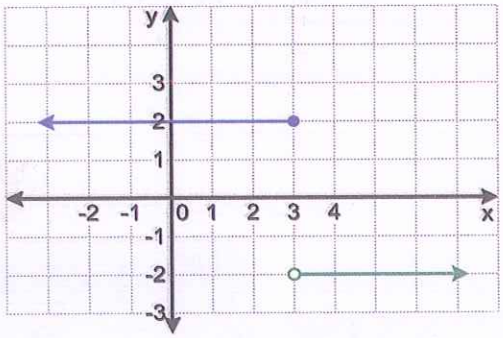
المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $(5, \infty)$.



$$(12)\ f(x) = \begin{cases} 2, & x \le 3 \\ -2, & x > 3 \end{cases}$$

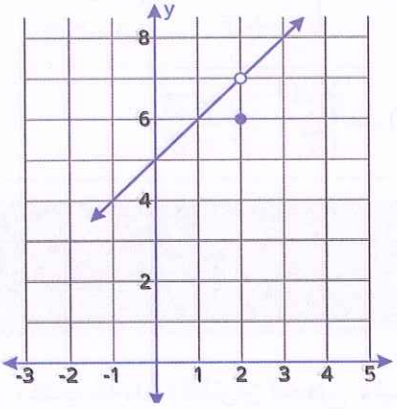
الحل

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $\{-2, 2\}$



$$(11)\ f(x) = \begin{cases} x + 5, & x \ne 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$$

الحل

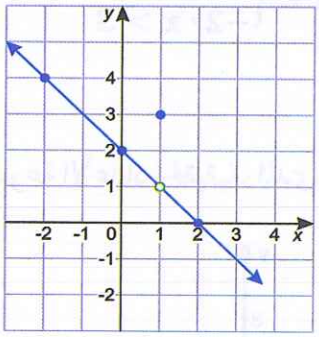


المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: $(-\infty, 7) \cup (7, \infty)$.

$$(10)\ f(x) = \begin{cases} 3, & x = 1 \\ -x + 2, & x \ne 1 \end{cases}$$

الحل

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 1 و $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$



أختبر نفسك (واجب)

كتاب التمارين صـ20

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه:

(5) $f(x)=\begin{cases}3x-4 & ,x<3\\ x+3 & ,x\geq 3\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}2x^2+3 & ,x<1\\ 5 & ,1\leq x<4\\ x+2 & ,x\geq 4\end{cases}$

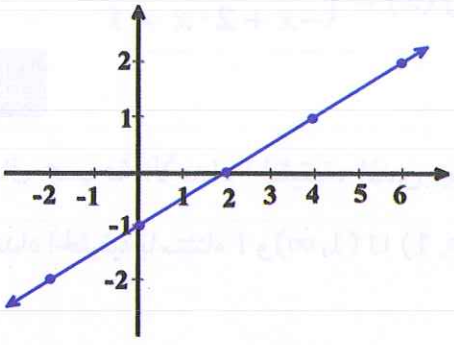
* $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 3\\ 7, & x=3\end{cases}$

رابعاً: إيجاد قاعدة الاقتران المتشعب إذا أعطي تمثيله البياني

مثال اكتب قاعدة الاقتران المعطى تمثيله البياني

في كل مما يأتي:

(1)



الحل (1) نحدد أي نقطتين على المستقيم:

$(-2,-2)\ (4,1)$

(2) نجد الميل:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1--2}{4--2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

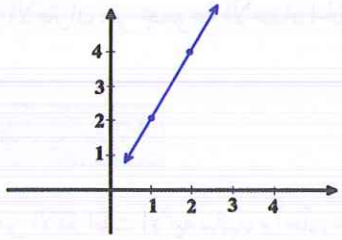
(3) معادلة المستقيم:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{1}{2}(x-4)\rightarrow y-1=\frac{1}{2}x-2$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}x-1}$$

(2)



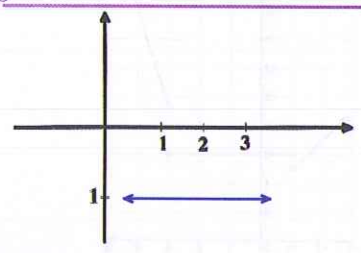
الحل (1)

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}|_{(1,2)\ (2,4)}=\frac{4-2}{2-1}=\frac{2}{1}=2$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\rightarrow y-2=2(x-1)$$

$$y-2=2x-2\rightarrow \boxed{y=2x}$$

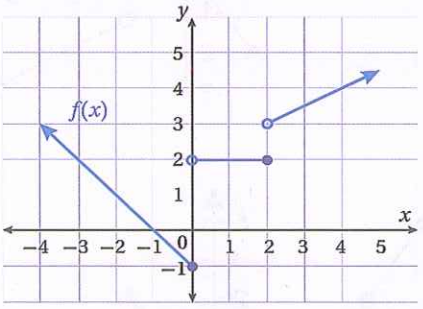
(3)



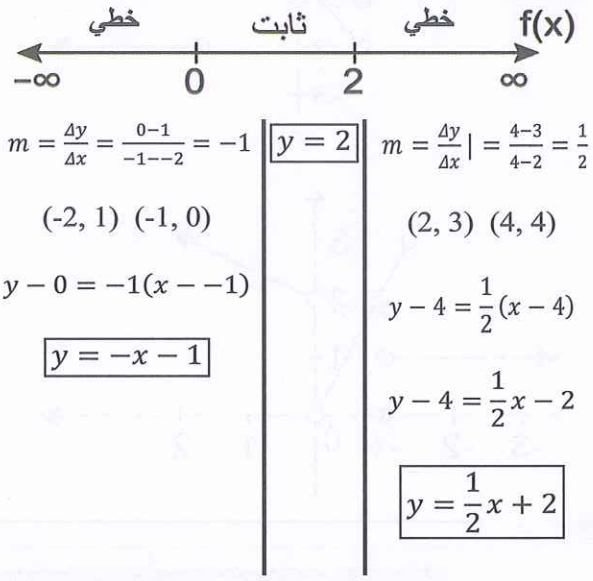
الحل

$$\boxed{y=-1}$$

مثال أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



الحل



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{-1--2} = -1$

(-2, 1) (-1, 0)

$y - 0 = -1(x - -1)$

$\boxed{y = -x - 1}$

$\boxed{y = 2}$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} | = \frac{4-3}{4-2} = \frac{1}{2}$

(2, 3) (4, 4)

$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$

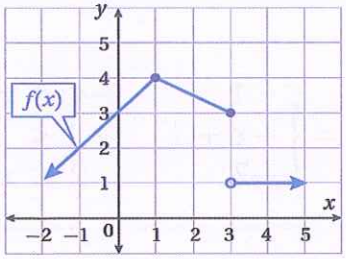
$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 2}$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & , x \le 0 \\ 2 & , 0 < x \le 2 \\ \frac{1}{2}x + 2 & , x > 2 \end{cases}$$

اتحقق من فهمي صـ11

أكتبُ قاعدة الاقتران $f(x)$ الممثل بيانياً في الشكل المجاور.



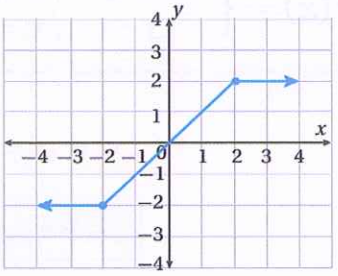
الحل

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x < 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} & , 1 \le x \le 3 \\ 1 & , x > 3 \end{cases}$$

كتاب الطالب صـ17

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

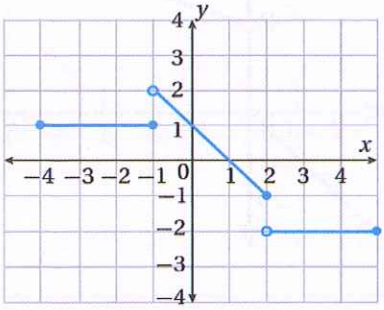
(15)



الحل

$$f(x) = \begin{cases} -2 & , x \le -2 \\ x & , -2 < x < 2 \\ 2 & , x \ge 2 \end{cases}$$

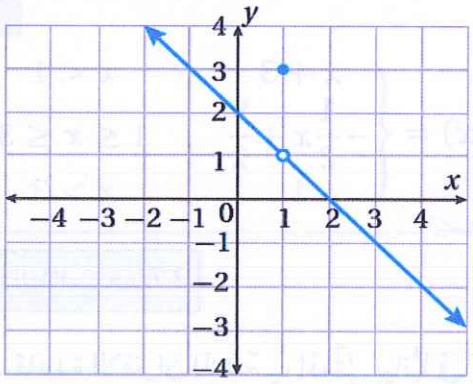
(16)



الحل

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,-4\le x\le -1\\ -x+1 & ,-1<x\le 2\\ -2 & ,\ 2<x\le 5\end{cases}$$

(17)



الحل

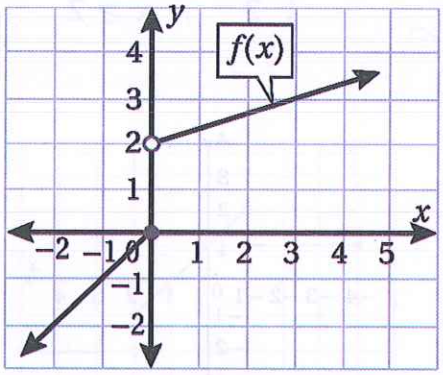
$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & ,x\neq 1\\ 3 & ,x=1\end{cases}$$

أختبر نفسك (واجب)

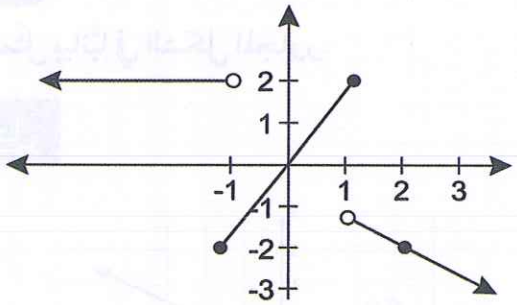
كتاب التمارين صـ20

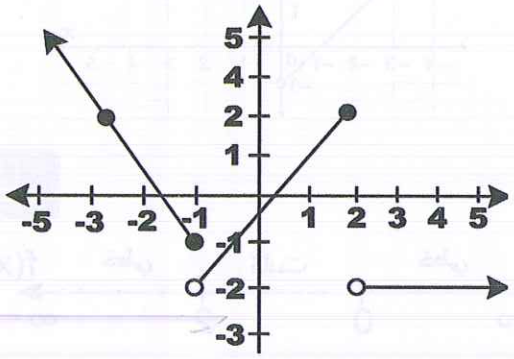
اكتب قاعدة الاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي:

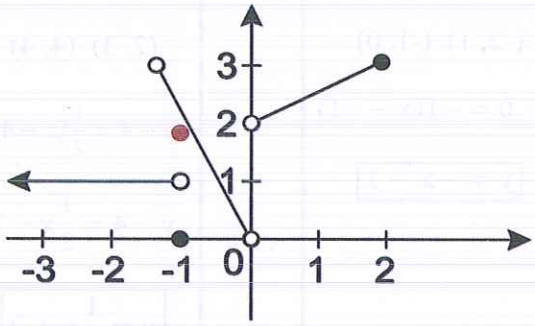
(4)



a)







خامساً: تطبيقات حياتية

مثال عمل: أجرة ساعة العمل

الواحدة في إحدى الشركات 4 دنانير خلال أوقات العمل النظامية المعتادة ضمن 40 ساعة عمل في الأسبوع. وتدفع الشركة لكلِّ ساعة عمل إضافي فوق ذلك أجرة ساعة ونصف من ساعات

العمل المعتاد. أكتبُ اقتراناً لحساب الأجرة الأسبوعية لعامل اشتغل x ساعة في أسبوع.

الحل

يوجد في المسألة قاعدتان لحساب الأجرة؛ تبعاً لعدد ساعات العمل.

الأجرة	عدد الساعات
$4x$	$0 \le x \le 40$
$4(40) + 6(x - 40)$	$x > 40$

إذن: اقتران الأجرة هو:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & , 0 \le x \le 40 \\ 6x - 80 & , x > 40 \end{cases}$$

اتحقق من فهمي صـ12

زادت شركة رواتب موظفيها الشهرية وفق الأسس الآتية: الرواتب التي تقلُّ عن 400 دينار زيدت بنسبة 15%، والرواتب من 400 دينار إلى أقلَّ من 600 دينار زيدت بنسبة 10%، مع علاوة ثابتة بقيمة 20 ديناراً، والرواتب من 600 دينار وأكثر زيدت 80 ديناراً. أكتبُ اقتراناً متشعباً لحساب الراتب الجديد لموظفي الشركة.

الحل

* الرواتب الأقل من (400) دينار

$$x + \frac{15}{100}x = 1x + 0.15x = 1.15x$$

* الرواتب من 400 إلى أقل من 600

$$x + \frac{10}{100}x + 20 = 1.1x + 20$$

* الرواتب أكثر من أو يساوي 600

$$x + 80$$

$$f(x) = \begin{cases} 1.15\,x & , x < 400 \\ 1.1x + 20 & , 400 \le x < 600 \\ x + 80 & , x \ge 600 \end{cases}$$

كتاب الطالب صـ18

(23) يُبيّن الجدول المجاور تعرفة ثمن المياه للاستهلاك المنزلي في الدورة الواحدة لبعض شرائح الاستهلاك.

1) كم تدفع أسرة استهلكت $42\ m^3$ من الماء؟

2) اكتب الاقتران المتشعب الذي يمكن استعماله لحساب ثمن المياه لأي كمية مستهلكة.

شرائح الاستهلاك مقرَّبة إلى أقرب m^3	التعرفة JD/m^3
0-18	0.361
19-36	0.450
37-54	0.550
55-72	1.000
أكثر من 72	1.200

الحل

(1)

$$18 \times 0.361 + 18 \times 0.45 + 6 \times 0.55 = 17.898\ JD$$

(2)

نلاحظ الاستهلاك له أكثر من قاعدة وكل قاعدة معرف ضمن مجال معين، نفرض أن كمية الاستهلاك x لذلك إذا كانت كمية الاستهلاك $0 \leq x \leq 18$ تكون الأجرة $0.361\,x$

وإذا كانت كمية الاستهلاك $18 < x \leq 36$

تكون الأجرة

$$0.361(18) + 0.45(x - 18)$$

وإذا كانت كمية الاستهلاك $36 < x \leq 54$

تكون الأجرة

$$0.361(18) + 0.45(18) + 0.55(x - 36)$$

وإذا كانت كمية الاستهلاك $54 < x \leq 72$

تكون الأجرة

$$0.361(18) + 0.45(18) + 0.55(18) + 1(x - 54)$$

وإذا كانت كمية الاستهلاك $x > 72$

تكون الأجرة

$$0.361(18) + 0.45(18) + 0.55(18) + 1(18 + 1.2(x - 72)$$

اقتران الأجرة هو

$$f(x) = \begin{cases} 0.361x & , \quad 0 \leq x \leq 18 \\ 0.450x - 1.602 & , \quad 18 < x \leq 36 \\ 0.550x - 5.202 & , \quad 36 < x \leq 54 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0.361x & , \quad 0 \leq x \leq 18 \\ 0.450x - 1.602 & , \quad 18 < x \leq 36 \\ 0.550x - 5.202 & , \quad 36 < x \leq 54 \\ x - 29.502 & , \quad 54 < x \leq 72 \\ 1.2x - 43.902 & , \quad x > 72 \end{cases}$$

تدفع الأسرة إذا استهلكت $42\ m^3$

حسب القاعدة الثالثة $0.550x - 5.202$

$$0.550(42) - 5.202 = 23.1 - 5.202$$
$$= 17.898$$

كتاب التمارين صـ20

(9) كهرباء: تزوّد شركة الكهرباء القطاع التجاري بالطاقة الكهربائية مقابل 1.20 دينار شهريًّا (رسومًا ثابتة)، يُضاف إليها 0.121 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة لأول 2000 كيلو واط ساعة في الشهر، و0.176 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة من كمّية الاستهلاك الزائدة على 2000 كيلو واط ساعة في الشهر. أكتبُ الاقتران الذي يُعطي قيمة فاتورة الكهرباء بدلالة كمّية الاستهلاك x كيلو واط ساعة شهريًّا.

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 1.2 + 0.121x & , \quad x \leq 2000 \\ 1.2 + 0.121(2000) + 0.176(x - 2000) & , \quad x > 2000 \end{cases}$$

أختبر نفسك (واجب)

يعمل محمد الكسواني في مكتب عدد ساعات العمل الرسمية فيه 8 ساعات فإذا كانت أجرة